Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 3$ și rația $r = 2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 4x + 5} = 1$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, știind că M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculați $\operatorname{ctg} a$, știind că $\sin a = \frac{1}{3}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(3))$.

5p **b)** Arătați că $A(-2015) + A(2015) = 2A(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)) = x^2$.

2. În $\mathbb{Z}_5[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + aX$, unde $\mathbb{Z}_5 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ și $a \in \mathbb{Z}_5$.

5p **a)** Calculați $f(\hat{0})$.

5p **b)** Determinați $a \in \mathbb{Z}_5$, știind că $f(\hat{3}) = \hat{3}$.

5p **c)** Arătați că, dacă $f(\hat{1}) = f(\hat{2})$, atunci $f(\hat{3}) = f(\hat{4})$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + \ln x}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0 = 1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{4}{3} - \ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$, are aria egală cu $\frac{1}{2} + \ln(n^2 + n)$.