

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $0,5 + 10 \cdot (1 - 0,75) = 3$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$. Arătați că $f(m) + g(-m) = m$, pentru orice număr real m .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 6} = \sqrt{5x}$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să fie divizor al lui 30.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(2,2)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic în B .
- 5p 6. Se consideră $E(x) = 3\cos^2 x - \cos \frac{x}{2} \cdot \sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & -2x \\ 1 & x-6 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(6)) = 12$.
- 5p b) Determinați numărul real a pentru care $A(4) \cdot A(4) = aA(4)$.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere naturale nenule, cu $m < n$, pentru care $\det(A(m) + A(n)) = 0$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy(x + y - xy)$.
- 5p a) Arătați că $1 * 3 = 3$.
- 5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x * 2 = -x^2$.
- 5p c) Determinați numărul întreg nenul m pentru care $\frac{1}{2m} * m = m$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x} - 3 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 3 \ln x}{x + 1} = 1$.
- 5p c) Demonstrați că $\frac{x^2 + x - 2}{x} \leq 3 \ln x$, pentru orice $x \in (0, 2]$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_0^2 (f(x) - x^3) dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 \frac{x^2}{f(x)-x} dx = \frac{\ln 2}{3}$.

5p c) Determinați $a \in (-\infty, 0)$, știind că $\int_a^0 e^{-x} (f'(x) - f(x)) dx = 1 - a^3 e^{-a}$.