EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2024
Proba E.c)
Matematică M_*șt-nat*

Test de antrenament

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Aflați primul termen al unei progresii geometrice $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, știind că $a_2=2$ și $a_5=54$.

5p **2.** Determinați valoarea sumei $x_1^2+x_2^2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+1=0$.

5p **3.** Calculați $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_9\left(3^{\log_3 81}\right)\right)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie simultan multiplu de 12 și divizor al numărului 360.

5p **5.** Se consideră în plan punctele $A(-6,1), B(1,2), C(-2,5)$. Determinați distanța de la punctul A la dreapta BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4,\ AC=6$ și $m(\sphericalangle A)=\frac{\pi}{3}$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x+1 & 1 & 1\\ x & x-2 & 1\\ 1 & x & 1\end{pmatrix},\ x\in\mathbb{R}$.

5p a) Aflați valorile reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p b) Arătați că $A(x+2)+A(x-2)=2A(x)$, oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p c) Se dau punctele $P(n+1,\ 1), Q(n,\ n-2), R(1,\ n)$. Determinați valorile întregi ale lui n, astfel încât aria suprafeței triunghiului PQR să fie egală cu 3.

2. Se consideră legea de compoziție asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$, oricare $x,\ y\in\mathbb{R}$.

5p a) Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, oricare $x,\ y\in\mathbb{R}$.

5p b) Determinați două numere $x,\ y$ din $\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care $x*y\in\mathbb{Z}$.

5p c) Calculați $1*2*3*\ldots*2024$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, oricare $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Determinați imaginea funcției f.

5p c) Demonstrați că $2<f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)\le 2\sqrt{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(4x^2-6x+2\right)e^{x^2}$.

5p a) Determinați numerele reale a și b, pentru care funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=(ax+b)e^{x^2}$ este o primitivă a funcției f.

5p b) Determinați intervalele de monotonie ale primitivei F.

5p c) Dacă $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este primitiva funcției f, astfel încât $G(1)=0$, calculați $\int_0^1 f(x)G(x)dx$.